

# Soluções analíticas da equação de Schrödinger para um potencial hiperbólico deformável

(Analytical solutions for the Schrödinger equation subjected to a deformable hyperbolic potential)

C. J. M. Fernandes\*, M. S. Cunha†

Grupo de Física Teórica - GFT, Centro de Ciência e Tecnologia - CCT

Universidade Estadual do Ceará - UECE

Av. Dr. Silas Munguba, 1700, CEP 60914-903, Fortaleza - CE.

**Resumo:** Neste trabalho discutimos detalhadamente as conhecidas soluções da equação de Schrödinger estacionária sujeita a um potencial hiperbólico deformável exatamente solúvel  $V(x) = \frac{V_0}{2}(1 + \tanh(\delta x))$ . Encontramos as soluções analíticas em termos das funções hipergeométricas de Gauss para os estados de espalhamento com energia maior que o máximo do potencial. Discutimos também o caso para energia menor que o máximo e as semelhanças e diferenças com o potencial degrau abrupto para ambos os casos. Ilustramos graficamente as situações físicas relevantes para o problema.

**Palavras-chave:** Equação de Schrödinger, potencial hiperbólico tangente, função hipergeométrica.

**Abstract:** In this work we discuss in detail the known solutions of the stationary Schrödinger equation subject to a deformable hyperbolic tangent potential exactly soluble  $V(x) = \frac{V_0}{2}(1 + \tanh(\delta x))$ . We find the analytical solutions in terms of Gauss hypergeometric functions for the scattering states with energy greater than the maximum value of the potential. We also discussed the case for the energy lower than the maximum and the similarities and differences with the abrupt step potential in both cases. We graphically illustrate the relevant physical situations to the problem.

**Keywords:** Schrödinger equation, hyperbolic tangent potential, hypergeometric functions.

## 1 Introdução

Lugar comum dizer que a Mecânica Quântica (MQ) desempenha papel central na Física, especialmente no que tange a seu grande leque de aplicações. Porém, no que concerne ao ensino de Física, em particular à MQ, ainda caminhamos a passos lentos para sua modernização e ampliação, não só porque as iniciativas foram muito centralizadas em determinadas regiões do país, mas também porque foram poucas. Vale ressaltar, entretanto, a iniciativa recente da Sociedade Brasileira de Física em descentralizar a formação de professores através dos Mestrados Profissionais [1], o que veio somar aos já consolidados mestrados e doutorados acadêmicos na área de Ensino de Física. Ainda assim, professores com formação em Ensino de Física ainda

---

\*Email: carlajamile\_melo@hotmail.com

†Email: marcony.cunha@uece.br

são raros em nossos cursos de Física, mesmo naqueles que possuem licenciaturas. Laboratórios didáticos sem experimentos de Física Moderna ainda são a regra em nossos cursos.

Passando um pouco ao largo desta questão histórica do ensino de Física no Brasil, neste trabalho pretendemos resgatar as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo para o potencial hiperbólico tangente, deformável. Este potencial deformável se aproxima do potencial degrau [2] no limite de grandes valores do que chamamos aqui de parâmetro de deformação. Este problema foi descrito, até onde sabemos, pela primeira vez em 1947, em uma publicação didática em alemão, e depois republicado em inglês em 1971, com reedições em 1991 e em 1999, por Siegfried Flügge [3].

Potenciais hiperbólicos estão relacionados, em grande parte, a problemas em física atômica e molecular. Em particular, podem ser utilizados para modelar transições de dopagens abruptas ou graduais em junções semicondutoras, ou ainda para modelar estruturas como nanofios com raio ou composição (ou ambos) variáveis [4]. Existem versões hiperbólicas dos potenciais moleculares de Scarf [5], Rosen-Morse [6] e Manning-Rosen [7], que são também de interesse na modelagem de vibrações e de forças moleculares [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Modelos que envolvem potenciais hiperbólicos são também muito utilizados em uma vasta gama de trabalhos encontrados em literatura especializada, nos mais variados contextos [15, 16, 17, 18, 19, 20], inclusive incorporando diferentes técnicas para o estudo das soluções da equação de Schrödinger [21, 22, 23, 24, 25, 26]. Obviamente, o estudo de soluções analíticas tem uma importância fundamental no entendimento conceitual da física desses modelos e de suas aplicações.

Encontra-se assim dividido este trabalho. Na próxima seção, estudamos os limites assintóticos da equação de Schrödinger com o potencial hiperbólico, considerando ondas incidindo pela esquerda. Na seção seguinte, por meio de mudanças nas variáveis dependente e independente, mostraremos como obter as soluções analíticas reescrevendo a equação de Schrödinger na forma da equação hipergeométrica de Gauss. A seguir, calculamos os coeficientes de reflexão e transmissão para a energia maior que a barreira de potencial e reobtemos a expressão do potencial degrau como caso limite. Na seção seguinte, calculamos o coeficiente de reflexão para energia menor que a barreira e mostramos que ele é identicamente igual à unidade, ou seja, que apesar da partícula penetrar na barreira de potencial, a reflexão é total. Calculamos ainda as constantes que aparecem no problema, para este caso, aplicando as condições de continuidade da função de onda e de sua derivada na origem. Mais uma vez, reobtemos uma expressão para as constantes do potencial degrau quando o parâmetro de deformação cresce ( $\delta \gg 1$ ). Por último apresentamos nossas considerações finais.

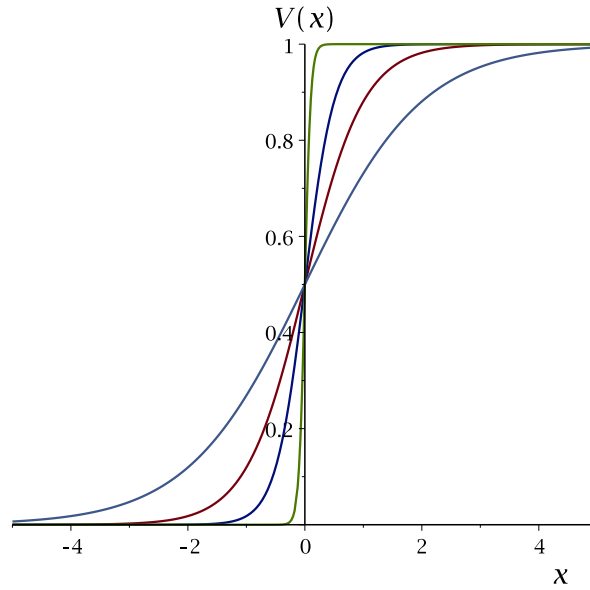
## 2 Potencial hiperbólico

Neste trabalho, nosso objetivo é discutir em detalhes as (não tão) conhecidas, nem discutidas nos livros didáticos, soluções analíticas da equação de Schrödinger para um potencial barreira tipo tangente hiperbólica deformável, tanto para energias acima da barreira de potencial, quanto para os estados com energia abaixo do máximo do potencial, para diversos

valores dos parâmetro de deformação. Para isso, consideremos então o potencial hiperbólico tipo degrau suave

$$V(x) = \frac{V_0}{2} [1 + \tanh(\delta x)], \quad (1)$$

onde  $\delta$  é o parâmetro que controla a deformação do potencial, ou seja, o quanto o potencial  $V(x)$  se aproxima ou se afasta de uma função degrau (quanto maior o valor de  $\delta$  mais esse potencial se aproxima de um degrau abrupto) [veja Fig. (1) abaixo].



**Figura 1:** Potencial  $V(x)$  para diversos valores do parâmetro de deformação  $\delta$ , a saber,  $\delta = 1/2, 1, 2, 10$  e  $V_0 = 1$ . Quanto maior  $\delta$ , mais o potencial se aproxima do potencial degrau.

A equação de Schrödinger estacionária para este potencial é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{V_0}{2} [1 + \tanh(\delta x)] \psi(x) = E\psi(x). \quad (2)$$

É útil, antes de procurar por soluções analíticas da equação, analisar seus limites assintóticos. Assim, tomando o limite  $x \rightarrow -\infty$ , temos aproximadamente uma equação de partícula livre

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \approx E\psi(x). \quad (3)$$

cujas soluções são

$$\psi \approx Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (4)$$

onde  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ .

O comportamento em  $x \rightarrow \infty$  é semelhante, com equação assintótica dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \approx (E - V_0)\psi(x). \quad (5)$$

A solução da equação acima, para  $E > V_0$  e para ondas incidindo pela esquerda, é

$$\psi \approx C e^{i\ell x} \quad (6)$$

onde  $\ell^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$ .

Para  $E < V_0$ , a solução fisicamente aceitável deve se atenuar para  $x \rightarrow \infty$ . Portanto, temos

$$\psi(x) \approx D e^{-\kappa x} \quad (7)$$

onde  $\kappa^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ .

### 3 Soluções analíticas: caso $E > V_0$

Para encontrar as soluções analíticas da equação de Schrödinger, Eq. (2), para o caso da energia maior que a barreira de potencial, podemos usar a seguinte mudança de variáveis

$$y = -e^{-2\delta x}, \quad (8)$$

e assim reescrever a equação de Schrödinger como

$$y^2\psi''(y) + y\psi'(y) + \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\delta^2} \left( E - \frac{V_0}{1-y} \right) \psi(y) = 0. \quad (9)$$

O passo seguinte é realizar uma transformação na variável dependente, a saber,

$$\psi(y) = y^\alpha (1-y)^\beta F(y), \quad (10)$$

na qual  $F(y)$  é uma função desconhecida. Substituindo a transformação acima na Eq. (9), temos

$$y(1-y)F''(y) + [1 + 2\alpha - (1 + 2\beta + 2\alpha)y]F'(y) + \left[ \left( \alpha^2 + \frac{\mathcal{E}}{4\delta^2} - \frac{\mathcal{V}_0}{4\delta^2} \right) \frac{1-y}{y} + \frac{\beta(\beta-1)y}{1-y} - (2\alpha+1)\beta - \frac{\mathcal{V}_0}{4\delta^2} \right] F(y) = 0, \quad (11)$$

onde definimos  $\mathcal{E} = 2mE/\hbar^2$  e  $\mathcal{V}_0 = 2mV_0/\hbar^2$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir

$$\beta = 1 \quad (12a)$$

$$\alpha^2 + \mathcal{E}/4\delta^2 - \mathcal{V}_0/4\delta^2 = 0. \quad (12b)$$

tal que  $\alpha = \pm (i/2\delta)\sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{V}_0}$ . Potanto, a Eq. (11) acima assume então a forma de uma equação hipergeométrica de Gauss,

$$y(1-y)F''(y) + [1 + 2\alpha - (3 + 2\alpha)y]F'(y) - (1 + 2\alpha + \mathcal{V}_0/4\delta^2)F(y) = 0 \quad (13)$$

cuja forma geral padrão é

$$z(1-z)F''(z) + [c - (1+a+b)z]F'(z) - abF(z) = 0, \quad (14)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes. A solução geral desta equação é dada em termos das funções hipergeométricas de Gauss [28], a saber,

$$F(z) = {}_2F_1(a, b, c; z) + z^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1, 2-c; z). \quad (15)$$

Comparando as Eqs. (13) e (14) acima, vemos facilmente que

$$c = 1 + 2\alpha \quad (16a)$$

$$a + b = 2 + 2\alpha \quad (16b)$$

$$ab = 1 + 2\alpha + \mathcal{V}_0/4\delta^2 \quad (16c)$$

Resolvendo o sistema para  $a$  e  $b$ , e utilizando a solução da Eq (12b), obtemos

$$a = 1 + \alpha \pm i\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\delta} \quad (17a)$$

$$b = 1 + \alpha \mp i\frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\delta} \quad (17b)$$

Escolhendo arbitrariamente, sem perda de generalidade,  $\alpha = -i\nu$ , e o sinal superior nas equações acima, ficamos com (o leitor interessado pode verificar que a escolha  $\alpha = i\nu$  produz exatamente as mesmas soluções)

$$a = 1 + i(\mu - \nu) \quad (18a)$$

$$b = 1 - i(\mu + \nu) \quad (18b)$$

$$c = 1 - i2\nu \quad (18c)$$

onde

$$\mu = \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2\delta}; \quad \nu = \frac{\sqrt{\mathcal{E} - \mathcal{V}_0}}{2\delta} \quad (19)$$

Podemos então escrever a solução geral da Eq. (13) como

$$F(y) = C_1 {}_2F_1\left(1 + i(\mu - \nu), 1 - i(\mu + \nu), 1 - 2i\nu; y\right) + C_2 y^{2i\nu} {}_2F_1\left(1 + i(\mu + \nu), 1 - i(\mu - \nu), 1 + 2i\nu; y\right). \quad (20)$$

Portanto, substituindo a equação acima na Eq. (10) temos,

$$\begin{aligned} \psi(y) = & C_1 y^{-i\nu} (1-y) {}_2F_1\left(1+i(\mu-\nu), 1-i(\mu+\nu), 1-2i\nu; y\right) \\ & + C_2 y^{i\nu} (1-y) {}_2F_1\left(1+i(\mu+\nu), 1-i(\mu-\nu), 1+2i\nu; y\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Em termos da variável  $x$ , a função de onda fica

$$\begin{aligned} \psi(x) = & C_1 (-1)^{-i\nu} e^{i\nu 2\delta x} (1+e^{-2\delta x}) {}_2F_1\left(1+i(\mu-\nu), 1-i(\mu+\nu), 1-2i\nu; -e^{-2\delta x}\right) \\ & + C_2 (-1)^{i\nu} e^{-i\nu 2\delta x} (1+e^{-2\delta x}) {}_2F_1\left(1+i(\mu+\nu), 1-i(\mu-\nu), 1+2i\nu; -e^{-2\delta x}\right). \end{aligned} \quad (22)$$

De acordo com a solução assintótica em  $x \rightarrow \infty$ , Eq. (6), é imediata a escolha da primeira solução da equação acima como a onda transmitida a partir de uma onda incidindo pela esquerda, uma vez que a segunda solução refere-se a uma onda refletida vindo da direita. Portanto, para a onda transmitida à direita da origem, temos

$$\Psi_T = D \psi_{trans} \quad (23)$$

onde

$$\psi_{trans}(x) = e^{i\nu 2\delta x} (1+e^{-2\delta x}) {}_2F_1\left(1+i(\mu-\nu), 1-i(\mu+\nu), 1-2i\nu; -e^{-2\delta x}\right). \quad (24)$$

e  $D = (-1)^{-i\nu} C_1$ .

A partir da solução de onda acima, apesar de ela própria não satisfazer o limite assintótico imposto pela Eq. (4), podemos obter as ondas incidente e refletida. Para tanto, usamos uma relação particularmente útil entre funções hipergeométricas [28]

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; z) = & \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c, 1+a-b; z^{-1}) \\ & + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c, 1+b-a; z^{-1}), \end{aligned} \quad (25)$$

com  $|\arg(-z)| < \pi$ , a fim de transformar a Eq. (24). Temos então,

$$\begin{aligned} \psi(x) = & A e^{i2\delta\mu x} (1+e^{2\delta x}) {}_2F_1\left(1+i(\mu-\nu), 1+i(\mu+\nu), 1+2i\mu; -e^{2\delta x}\right) \\ & + B e^{-i2\delta\mu x} (1+e^{2\delta x}) {}_2F_1\left(1-i(\mu+\nu), 1-i(\mu-\nu), 1-2i\mu; -e^{2\delta x}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

onde

$$A \equiv C_1 (-1)^{-i\nu} \frac{\Gamma(1-i2\nu)\Gamma(-i2\mu)}{\Gamma[1-i(\mu+\nu)]\Gamma[-i(\mu+\nu)]} \quad (27a)$$

$$B \equiv C_1 (-1)^{-i\nu} \frac{\Gamma(1-i2\nu)\Gamma(i2\mu)}{\Gamma[1+i(\mu-\nu)]\Gamma[i(\mu-\nu)]} \quad (27b)$$

Assim, neste caso, temos que as soluções fisicamente aceitáveis são aquelas equivalentes a ondas incidindo pela esquerda e que satisfazem as condições assintóticas adequadas, Eq. (4), e podem ser escritas explicitamente como uma combinação linear de uma onda incidente e outra refletida, ou seja,

$$\Psi_L(x) = A \psi_{inc}(x) + B \psi_{ref}(x), \quad (28)$$

onde

$$\psi_{inc}(x) = e^{i2\delta\mu x} (1 + e^{2\delta x}) {}_2F_1\left(1 + i(\mu - \nu), 1 + i(\mu + \nu), 1 + 2i\mu; -e^{2\delta x}\right) \quad (29)$$

$$\psi_{ref}(x) = e^{-i2\mu\delta x} (1 + e^{2\delta x}) {}_2F_1\left(1 - i(\mu + \nu), 1 - i(\mu - \nu), 1 - 2i\mu; -e^{2\delta x}\right), \quad (30)$$

com  $A$  e  $B$  definidos acima. Abaixo, as Figs. (2) e (3) representam a densidade de probabilidade,  $|\psi|^2$ , para os casos onde  $\mathcal{E} = \mathcal{V}_0$  e  $\mathcal{E} = 2\mathcal{V}_0$  e para alguns valores do parâmetro de deformação  $\delta$ .

O leitor mais atento poderia se perguntar como uma única solução pode gerar duas outras soluções linearmente independentes (L. I.). Mas é esse exatamente o caso e pode ser conferido utilizando-se a transformação  $y = -e^{2\delta x}$  no lugar da Eq. (8). É interessante o leitor pesquisar um pouco sobre equações hipergeométricas e ver que, no caso da hipergeométrica de Gauss, é possível, por causa dos pontos singulares da equação e, portanto, de suas simetrias, encontrar duas soluções L. I. para cada um dos três pontos singulares, ou seja, seis soluções. Ainda, por causa das simetrias da equação descritas pelas transformações de Möbius, é possível encontrar mais três soluções L. D. (linearmente dependentes) para cada solução L. I. A equação hipergeométrica de Gauss possui, portanto, 24 soluções todas relacionadas pelas transformações de Möbius [27, 28, 29]

## 4 Coeficientes de transmissão e reflexão

Como sugerem as soluções assintóticas, os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser obtidos diretamente das constantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  descritas acima. São dados, respectivamente, por  $R = |B/A|^2$  e  $T = (\nu/\mu)|C/A|^2$ . Explicitamente, temos

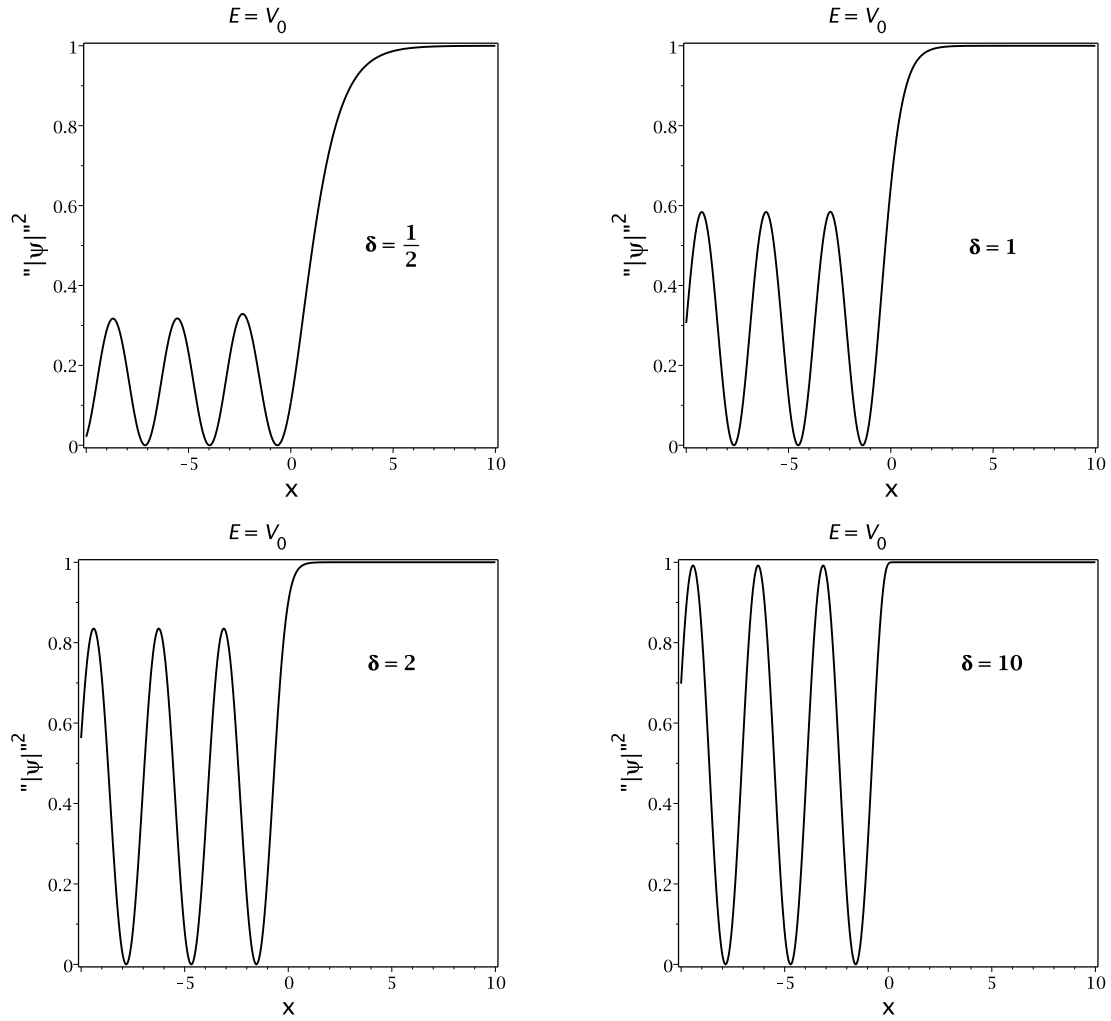
$$R = \left| \frac{\Gamma(i2\mu) \Gamma[1 - i(\mu + \nu)] \Gamma[-i(\mu + \nu)]}{\Gamma(-i2\mu) \Gamma[1 + i(\mu - \nu)] \Gamma[i(\mu - \nu)]} \right|^2 \quad (31)$$

$$T = \frac{\nu}{\mu} \left| \frac{\Gamma[1 - i(\mu + \nu)] \Gamma[-i(\mu + \nu)]}{\Gamma(1 - i2\nu) \Gamma(-i2\mu)} \right|^2 \quad (32)$$

Podemos simplificar as expressões acima utilizando, primeiro, o fato de que o módulo quadrado de grandezas conjugadas complexas uma da outra são iguais. Assim,  $|\Gamma(i2\mu)|^2 = |\Gamma(-i2\mu)|^2$ . Segundo, podemos usar as expressões [3, 28]

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(1 + z) \quad (33a)$$

$$|\Gamma(1 + i\eta)|^2 = \frac{\pi\eta}{\sinh(\pi\eta)}, \quad (33b)$$



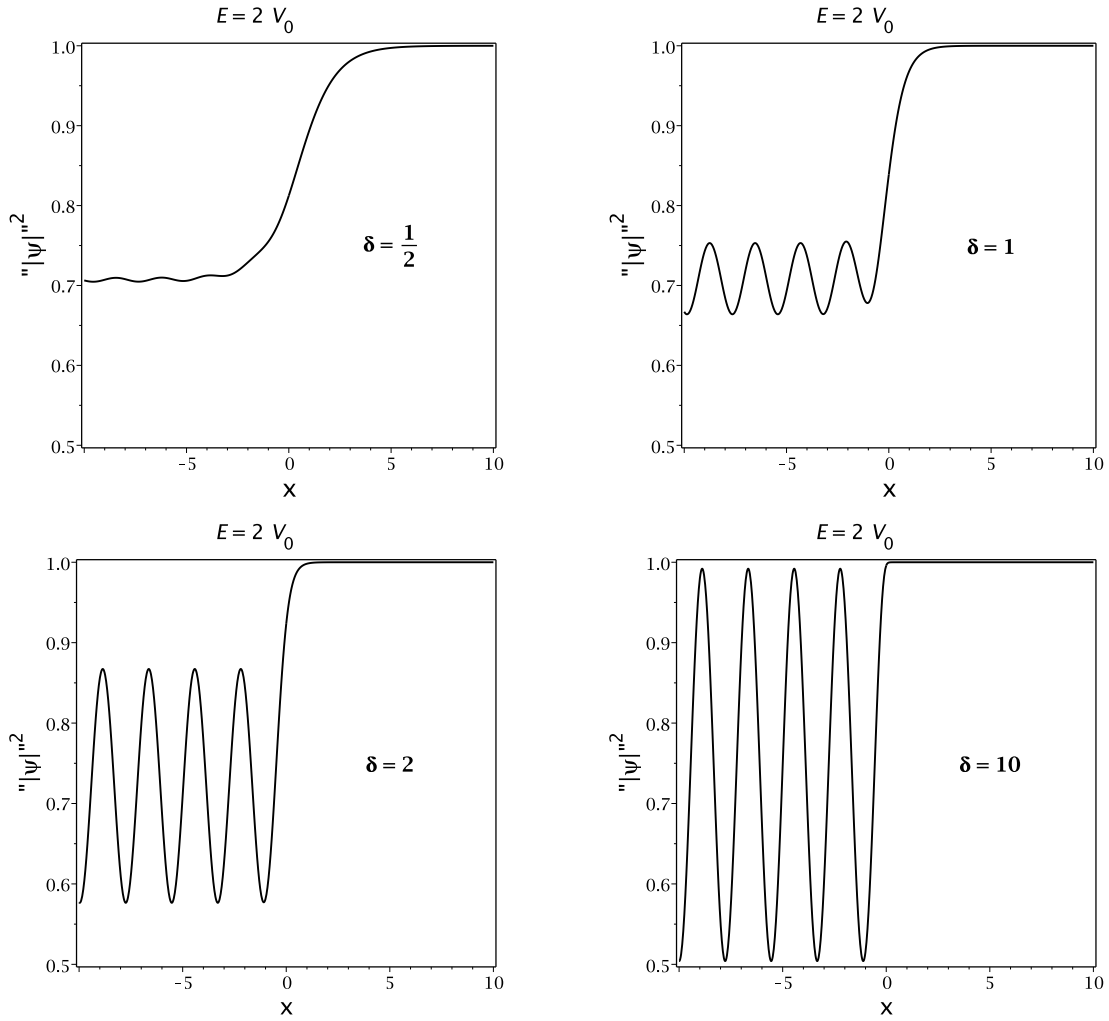
**Figura 2:** Módulo quadrado da função de onda,  $|\psi|^2$ , para  $E = V_0$  e para diversos valores de  $\delta$ , a saber,  $\delta = 1/2$ , 1, 2, e 10.

onde  $\eta \in \mathbb{R}$ . As expressões dos coeficientes de reflexão e transmissão são reescritas, usando a primeira das expressões acima, como

$$R = \frac{(\mu - \nu)^2}{(\mu + \nu)^2} \left| \frac{\Gamma[1 - i(\mu + \nu)]}{\Gamma[1 + i(\mu + \nu)]} \right|^4 \quad (34)$$

$$T = \frac{4\mu\nu}{(\mu + \nu)^2} \frac{|\Gamma[1 - i(\mu + \nu)]|^4}{|\Gamma(1 - i2\mu)\Gamma(1 - i2\nu)|^2} \quad (35)$$





**Figura 3:** Módulo quadrado da função de onda,  $|\psi|^2$ , para  $E = 2V_0$  e para diversos valores de  $\delta$ , a saber,  $\delta = 1/2, 1, 2$ , e  $10$ .

Utilizando a segunda expressão, Eq. (33b), podemos reescrever os coeficientes em termos de funções hiperbólicas como

$$R = \frac{\sinh^2 \pi(\mu - \nu)}{\sinh^2 \pi(\mu + \nu)} \quad (36)$$

$$T = \frac{\sinh(2\pi\mu) \sinh(2\pi\nu)}{\sinh^2 \pi(\mu + \nu)} \quad (37)$$

A partir destas expressões, não é difícil verificar a relação  $R + T = 1$ .

A partir desse ponto, podemos averiguar com mais facilidade o caso limite quando  $\delta \gg 1$ . Este é o caso quando o potencial, dado pela Eq. (1), tende para o potencial degrau e os parâmetros  $\mu$  e  $\nu$ , dados pela Eq. (19), se tornam muito pequenos. Podemos pois considerar

$\sinh(x) \approx x$ , o que produz as seguintes relações para os coeficientes de reflexão e transmissão, a saber,

$$R \approx \frac{(k - \ell)^2}{(k + \ell)^2} \quad (38)$$

$$T \approx \frac{4k\ell}{(k + \ell)^2} \quad (39)$$

com  $k^2 = \mathcal{E}$  e  $\ell^2 = \mathcal{E} - \mathcal{V}_0$  (exatamente como nos casos assintóticos  $x \rightarrow \pm\infty$ ).

## 5 Penetração na barreira de potencial: caso $E < V_0$

Para casos onde a energia é menor que  $V_0$ , as soluções à direita deixam de ser do tipo partícula livre e passam a se comportar como a Eq. (7). Esta é a razão física de considerarmos, desta vez, a segunda solução da Eq. (22). Temos então,

$$\Psi_p(x) = \tilde{D}\psi_\kappa(x) \quad (40)$$

onde

$$\psi_\kappa(x) = e^{-\kappa x} (1 + e^{-2\delta x}) {}_2F_1\left(1 + \frac{\kappa}{2\delta} + i\mu, 1 + \frac{\kappa}{2\delta} - i\mu, 1 + \frac{\kappa}{\delta}; -e^{-2\delta x}\right), \quad (41)$$

com  $\kappa = \sqrt{\mathcal{V}_0 - \mathcal{E}}$  e  $\tilde{D} = C_2(-1)^{\kappa/2\delta}$ . As soluções à esquerda são semelhantes às Eqs. (29) e (30), exceto que agora devemos substituir  $i\nu \rightarrow \kappa/2\delta$  nas respectivas expressões, ou seja,

$$\tilde{A} \equiv C_1(-1)^{-\kappa/2\delta} \frac{\Gamma(1 - \kappa/\delta)\Gamma(-i2\mu)}{\Gamma[1 - \kappa/2\delta - i\mu]\Gamma[-\kappa/2\delta - i\mu]} \quad (42a)$$

$$\tilde{B} \equiv C_1(-1)^{-\kappa/2\delta} \frac{\Gamma(1 - \kappa/\delta)\Gamma(i2\mu)}{\Gamma[1 - \kappa/2\delta + i\mu]\Gamma[-\kappa/2\delta + i\mu]} \quad (42b)$$

e a solução à esquerda da origem fica

$$\tilde{\Psi}_L(x) = \tilde{A}\tilde{\psi}_{inc}(x) + \tilde{B}\tilde{\psi}_{ref}(x), \quad (43)$$

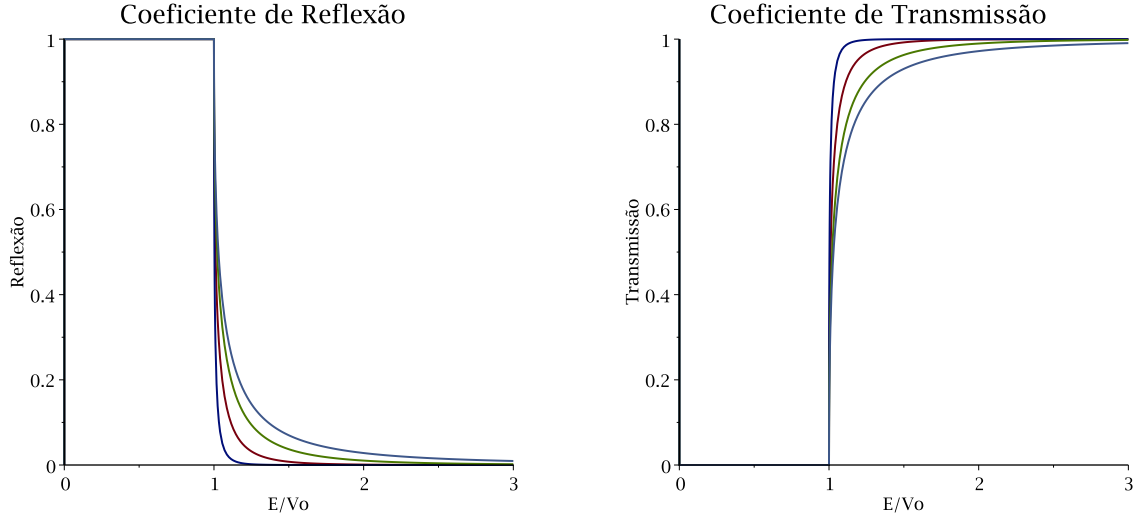
sendo que as ondas incidente e refletida são agora dadas por

$$\tilde{\psi}_{inc}(x) = e^{i2\delta\mu x} (1 + e^{2\delta x}) {}_2F_1\left(1 - \kappa/2\delta + i\mu, 1 + \kappa/2\delta + i\mu, 1 + 2i\mu; -e^{2\delta x}\right) \quad (44a)$$

$$\tilde{\psi}_{ref}(x) = e^{-i2\delta\mu x} (1 + e^{2\delta x}) {}_2F_1\left(1 - \kappa/2\delta - i\mu, 1 + \kappa/2\delta - i\mu, 1 - 2i\mu; -e^{2\delta x}\right). \quad (44b)$$

O coeficiente de reflexão pode ser obtido diretamente da Eq. (31), trocando  $i\nu \rightarrow \kappa/2\delta$ , ou utilizando-se as Eqs. (42a) e (42b). Temos então,

$$R = \left| \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma(i2\mu)\Gamma(1 - \kappa/2\delta - i\mu)\Gamma(-\kappa/2\delta - i\mu)}{\Gamma(-i2\mu)\Gamma(1 - \kappa/2\delta + i\mu)\Gamma(-\kappa/2\delta + i\mu)} \right|^2. \quad (45)$$



**Figura 4:** Gráficos dos coeficientes de reflexão e transmissão em função da razão  $\mathcal{E}/\mathcal{V}_0$ , onde  $\mathcal{E} = (2m/\hbar^2)E$  e  $\mathcal{V}_0 = (2m/\hbar^2)V_0$ , para diferentes valores de  $\delta$ . Em cada gráfico, as curvas da esquerda para a direita correspondem a, respectivamente,  $\delta = 1/2, 1, 2, 10$ .

Podemos facilmente constatar que o denominador da equação acima é o complexo conjugado do numerador. Como o módulo quadrado de um número complexo é igual ao módulo quadrado de seu conjugado, isso implica que o coeficiente de reflexão é identicamente igual a 1. Esse resultado mostra que, apesar da função de onda penetrar na barreira, inexoravelmente toda a onda será refletida de volta. Esse resultado impõe, por conseguinte, que o coeficiente de transmissão seja nulo.

Na Fig. (4), mostramos os coeficientes de reflexão e transmissão em função da razão da energia relativa à altura máxima da barreira de potencial,  $\mathcal{E}/\mathcal{V}_0$ , para diversos valores do parâmetro  $\delta$  responsável por deformar a barreira de potencial.

O próximo passo é analisar as funções de onda para os valores  $\mathcal{E} < \mathcal{V}_0$ . Os estados de energia nesse caso também são contínuos e as soluções estão representadas acima, nas Eqs. (40) e (43). Uma vez que a constante  $\tilde{D}$  na Eq. (40) é desconhecida, podemos usar as condições de continuidade das funções e de suas derivadas na origem para determiná-la. De fato, é fácil mostrar que

$$\tilde{D} = \frac{\tilde{\psi}_{inc}(0)\tilde{\psi}'_{ref}(0) - \tilde{\psi}'_{inc}(0)\tilde{\psi}_{ref}(0)}{\tilde{\psi}_{\kappa}(0)\tilde{\psi}'_{ref}(0) - \tilde{\psi}'_{\kappa}(0)\tilde{\psi}_{ref}(0)}\tilde{A} \quad (46)$$

Da mesma forma, podemos usar essas mesmas condições de continuidade para escrever  $\tilde{B}$  em função de  $\tilde{A}$ . A relação é dada abaixo.

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{\psi}_{\kappa}(0)\tilde{\psi}'_{inc}(0) - \tilde{\psi}'_{\kappa}(0)\tilde{\psi}_{inc}(0)}{\tilde{\psi}'_{\kappa}(0)\tilde{\psi}_{ref}(0) - \tilde{\psi}_{\kappa}(0)\tilde{\psi}'_{ref}(0)}\tilde{A} \quad (47)$$

É interessante analisar o comportamento das soluções para  $\delta \gg 1$ , como fizemos na seção anterior. Podemos analisar a própria equação de Schrödinger, que pode fornecer as soluções bem conhecidas do potencial degrau, ou podemos averiguar como se comportam as soluções nesse limite. Essencialmente, a análise do comportamento das soluções se resume a analisar a função hipergeométrica de Gauss na origem. Para  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ,  $F(a, b, c; 0) = 1$ .

Portanto, para  $x$  positivo e  $\delta \gg 1$ , a Eq. (41) pode ser aproximada por  $\tilde{\psi}_k(x) \approx e^{-\kappa x}$ . Da mesma forma, para as Eqs. (44a) e (44b), quando  $x$  é negativo e  $\delta \gg 1$ , temos  $\tilde{\psi}_{inc}(x) \approx e^{ikx}$  e  $\tilde{\psi}_{ref}(x) \approx e^{-ikx}$ , respectivamente. Desta forma, as Eqs. (46) e (47) podem ser aproximadas por

$$\tilde{D} \approx \frac{2k}{k + i\kappa} \tilde{A} \quad (48)$$

$$\tilde{B} \approx \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \tilde{A}, \quad (49)$$

que equivale, novamente, às relações das constantes para o potencial degrau, como esperado.

Escolhendo convenientemente  $C_1(-1)^{-k/2\delta}$  na Eq. (42a), apresentamos as figuras com conjuntos de gráficos para alguns valores de  $\mathcal{E}$  e de  $\delta$ . O primeiro conjunto, Fig. (5), representa a densidade de probabilidade para um perfil mais suave do potencial ( $\delta = 1/2$ ). Note-se o aumento relativo da densidade de probabilidade quando o valor da energia se aproxima da altura máxima do potencial, sendo inclusive mais provável encontrar a partícula em um intervalo um pouco mais à direita da origem, o que não acontece para o potencial degrau.

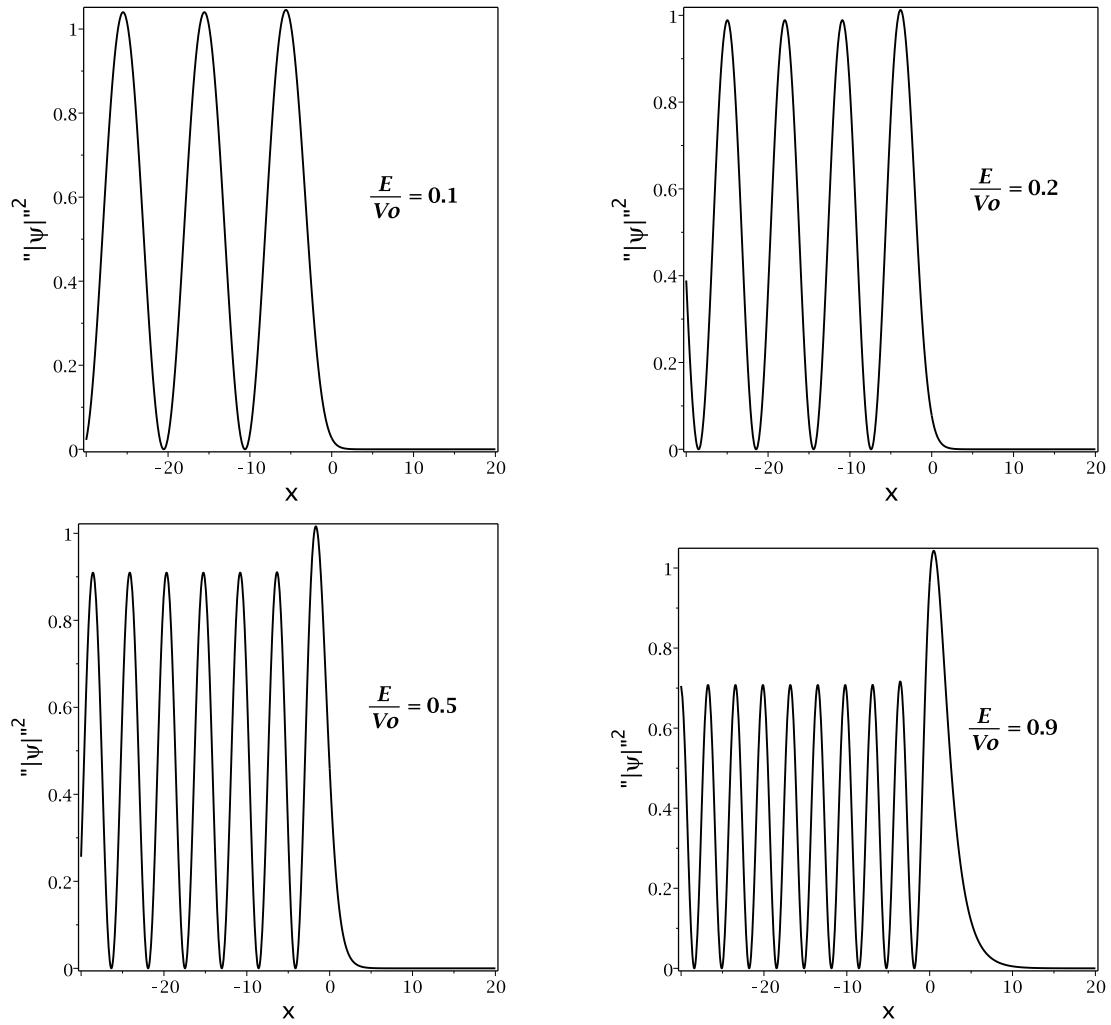
O segundo conjunto de gráficos, Fig. (6), representa a densidade de probabilidade para um perfil mais abrupto do potencial para  $\delta = 10$  [cf. Fig. (1)], apresentando um comportamento esperado mais próximo de um potencial degrau típico.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho, discutimos detalhadamente as soluções da equação de Schrödinger estacionária para um problema antigo e pouco, ou quase nada, discutido nos livros didáticos de mecânica quântica, a saber, o problema do potencial deformável hiperbólico tangente. Discutimos os limites assintóticos da equação de Schrödinger, apresentamos as soluções analíticas do problema e, a partir delas, o caso limite do potencial degrau quando o parâmetro de deformação cresce muito. Mostramos como obter todas as relações relevantes para o potencial degrau abrupto a partir das relações para as soluções do potencial hiperbólico.

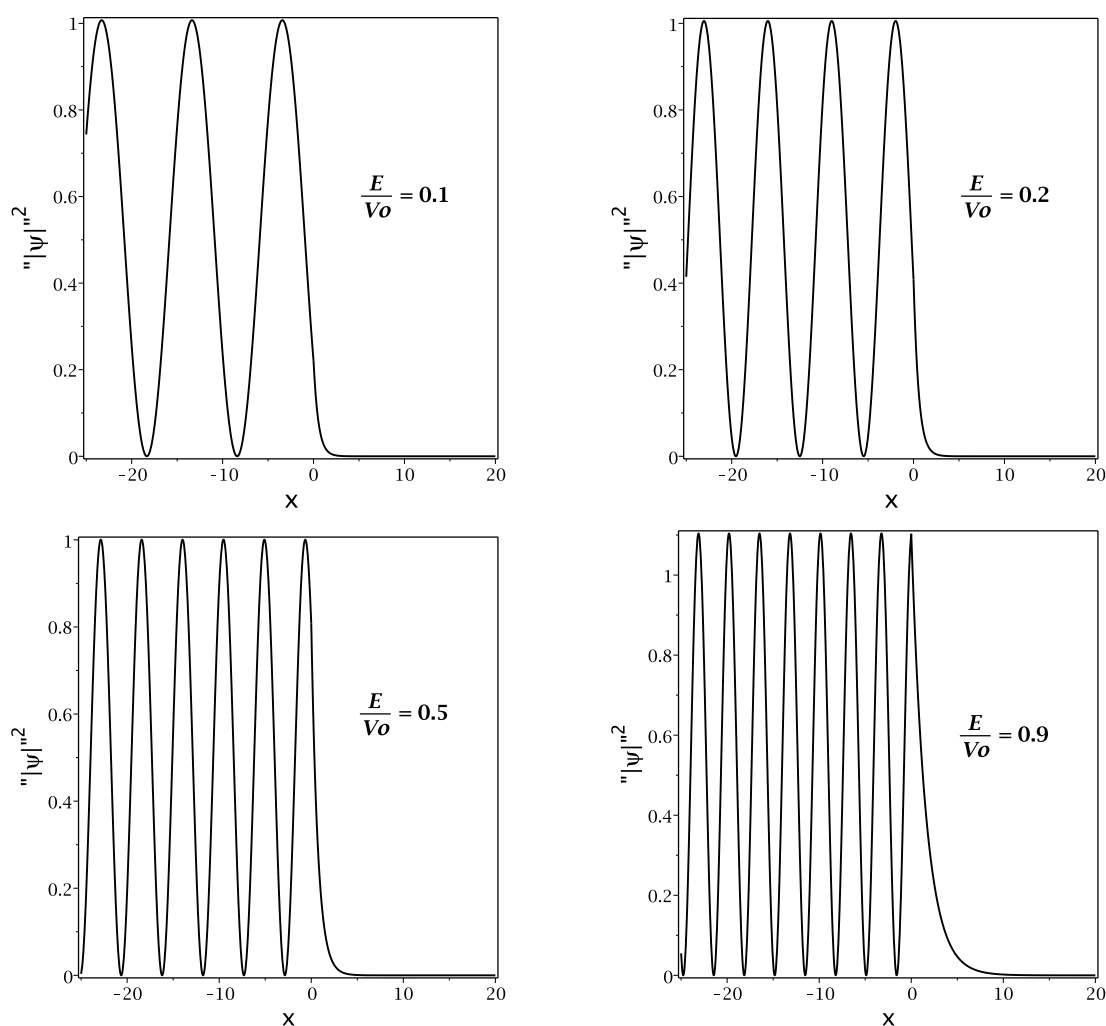
## 7 Agradecimentos

Este trabalho é financiado parcialmente pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq sob número 312251/2015-7 e pela Universidade Estadual do Ceará -



**Figura 5:** Módulo quadrado da função de onda,  $|\psi|^2$ , para energia abaixo da altura máxima da barreira de potencial,  $E/V_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 0.9$ , para  $\delta = 1/2$ .

UECE através do Programa Institucional de Bolsas IC/UECE.



**Figura 6:** Módulo quadrado da função de onda,  $|\psi|^2$ , para energia abaixo da altura máxima da barreira de potencial,  $E/V_0 = 0.1, 0.2, 0.5, 0.9$ , para  $\delta = 10$ .

## Referências

- [1] O Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física pode ser acessado em <http://www.sbfisica.org.br/~mnpef/>. Em particular, o MNPEF, Polo 23, da Faculdade de Educação Ciências e Letras do Sertão Central - FECLES, da Universidade Estadual do Ceará, pode ser acessado em <http://www.uece.br/mnpef/>
- [2] M. A. Cândido Ribeiro, V.C. Franzoni, W.R. Passos, E.C. Silva, A.N.F. Aleixo. Rev. Bras. Ensino Fis. 26, nº 1, 1-10 (2004).
- [3] S. Flügge. *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1ª edição 1971. (Publicado pela primeira vez em 1947 in *Grundlehren der mathematischen Wissens-*

- chaften vols. 177 e 178, em alemão).
- [4] M. Willatzen, B. Lassen. J. Phys.: Cond. Matter 19, 136217 (2007).
  - [5] F. Scarf, Phys. Rev. 112, 1137 (1958).
  - [6] N. Rosen and P.M. Morse. Phys. Rev. 42, 210 (1932).
  - [7] M.F. Manning and N. Rosen. Phys. Rev. 44, 953 (1933).
  - [8] M. Znojil. J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000) L61.
  - [9] O. Yesiltas. Phys. Scr. 75 (2007) 41.
  - [10] A. de Souza Dutra. Phys. Lett. A 339 (2005) 252.
  - [11] G.-F. Wei, C.-Y. Long, and S.-H. Dong. Phys. Lett. A 372 (2008) 2592; G.-F. Wei and S.-H. Dong. Phys. Lett. A 373 (2008) 49; G.-F. Wei, Z.-Z. Zhen, and S.-H. Dong. Central E. J. Phys. 7 (2009) 175; G.-F. Wei and S.-H. Dong. Phys. Lett. B 686, 288 (2010); X.-Y. Gu and S.-H. Dong. J. Math. Chem. 49, 2053 (2011).
  - [12] W.-C. Qiang and S.-H. Dong. Phys. Scr. 79, 045004 (2009).
  - [13] F. Correa and M.S. Plyushchay. Ann. Phys. 327 (2012) 1761.
  - [14] A. Bharali, Prog. Theor. Exp. Phys. 033A01 (2013).
  - [15] C. Rojas. Mod. Phys. Lett. A 29, 1450146 (2014).
  - [16] S. Dong, G.-H. Sun, B.J. Falaye, S.-H. Dong. Eur. Phys. J. Plus (2016) 131: 176
  - [17] G.-H. Sun, D. Popov, O. Camacho-Nieto, S. H. Dong. Chin. Phys. B Vol. 24, No. 10, 100303 (2015).
  - [18] A. Arda, O. Aydogdu, R. Sever. J. Phys. A: Math. Theor. 43, 425204 (2010).
  - [19] D. X. Macedo, I. Guedes. Physica A 434, 211219 (2015).
  - [20] A.M. Ishkhanyan. Phys. Lett. A 380, 640644 (2016).
  - [21] M. S. Cunha, H. R. Christiansen. Commun. Theor. Phys. 22, No. 11, 110301 (2013).
  - [22] H. R. Christiansen, M. S. Cunha. J. Math. Phys. **54** (2013) 122108.
  - [23] H. R. Christiansen, M. S. Cunha. J. Math. Phys. 55, 092102 (2014)
  - [24] B. J. Falaye, K. J. Oyewumi, M. Abbas. Chin. Phys. B Vol. **60** (2013) 642.
  - [25] B. Bagchi, A. Banerjee, C. Quesne, V. M. Tkachuk. J. Phys. A: Math. Gen. 38, 29292945 (2005).

- [26] A. de Sousa Dutra, M. Hott, C. A. S. Almeida. Europhys. Lett. 62, 1, 8-13 (2003)
- [27] R. S. Maier. Math. J. Comput. 76, 811-843 (2007).
- [28] Abramowitz, M., Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical functions: Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 1972.
- [29] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge University Press, 1966.
- [30] Qiong-Tao Xie, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 175302,
- [31] Bei-Hua Chen, Yan Wu and Qiong-Tao Xie, J. Phys. A: Math. Theor. 46 (2013) 035301.
- [32] Downing, C. A. J. Math. Phys. 54 (2013) 072101.